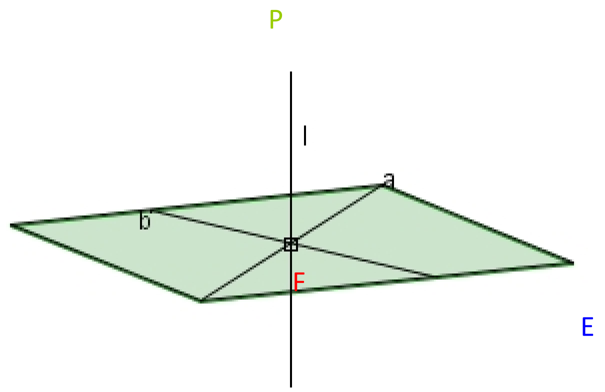
Abstand eines Punktes von einer Ebene

Den Abstand eines Punktes von einer Ebene ist in drei Schritten ermittelbar:

1. Aufstellen einer Gleichung der zu E orthogonalen Geraden durch P (Lotgerade)
2. Koordinaten des Schnittpunktes F der Lotgeraden mit der Ebene E berechnen
3. Abstand als Betrag von PF berechnen



Unter dem Abstand l eines Punktes P von einer Ebene E versteht man die Länge l des Lotes von P auf die Ebene E, d.h. die Länge l der Strecke vom Punkt P zum Lotfußpunkt F.

<u>Beispiel 1</u>:

Geg.: P(2/0/1) E: $x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 25$

Ges.: -Gleichung der Lotgeraden g -Koordinaten des Lotfußpunktes F

-Abstand des Punktes P von E

1. Normalenvektor von E = Richtungsvektor von g

$\longrightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ d.h.: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

2. F ermitteln:

aus g: $x_1 = 2 + t$ $x_2 = 8t$ $x_3 = 1 - 4t$

Einsetzen in E: $2+t+8\cdot 8t-4(1-4t)=25$

$$81t-2=25$$

$$t=\frac{1}{3}$$

Einsetzen in g: $F\left[\left(\frac{7}{3}\right)/\left(\frac{8}{3}\right)/\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$

3. Abstand der Punkte P und F als Betrag des Vektors PF berechnen.

$$\left|\overrightarrow{PF}\right|=\sqrt{\left(\frac{7}{3}-2\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}-1\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{81}=3$$

Der Abstand des Punktes P von der Ebene E ist somit 3.

Beispiel 2:

Geg.: A(3/5/-1) B(7/1/-3) C(5/-3/1) D(1/1/3) $\longrightarrow$ liegen in Ebene E

und bilden Ecken eines Quadrats

E = Grundfläche zweier Pyramiden mit der Höhe 6

Ges.: Koordinaten der zugehörigen Spitzen

1. Bestimmen der Ebene E aus den Punkten A, B, C und D (siehe Seite 95)

   man erhält: $E = 2x_1 + x_2 + 2x_3$

2. Normalenvektor der Ebene E bestimmen

   $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (aus der Koordinatengleichung der Ebene E heraus lesen)

3. Mittelpunkt der Grundfläche und somit Fußpunkt der Höhe bestimmen

   $M = (\bar{C} - \bar{A})\frac{1}{2}$ bzw. $M = (\bar{D} - \bar{B})\frac{1}{2}$

   da AC und BD die Diagonalen des Quadrats sind.
   M = (4/1/0)

4. Höhe von S = Abstand von S zur Ebene E bzw. dem Punkt M

   d.h. 6 mal den Normalenvektor $\frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$ der Länge 1 antragen um S zu erhalten.

$$\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OM} + 6 \cdot \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

5. S_1 (8/3/4)

   S_2 (0/-1/-4)

!Anmerkung!:

Bei Schritt 3 hat das Buch einen Fehler.

Nehmt die hier angegebene Formel um auf M zu kommen lasst euch also nicht von dem Ergebnis verwirren. Es ist hier falsch angegeben. M ist also eigentlich nicht (4/1/0). Ich habe es aber hier übernommen.

Dieses Thema und weitere Übungen findet ihr auf den Seiten 150-151.